



## Серия №31. Теория Рамсея

19 июля

- а) Докажите, что среди любых 6 человек найдутся трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых людей.  
б) Докажите, что среди любых 9 человек найдутся трое попарно знакомых, либо четверо попарно незнакомых людей.

**Определения.**  $m$ -клика – полный подграф на  $m$  вершинах. Число Рамсея  $R(m, n)$  – наименьшее натуральное число  $x$  такое, что для любой раскраски рёбер полного графа на  $x$  вершинах в два цвета найдётся  $m$ -клика с рёбрами цвета 1, либо  $n$ -клика с рёбрами цвета 2.

**Теорема Рамсея.**  $R(m, n)$  существует для любых натуральных  $m, n$ .

**Упражнение.** Докажите, что  $R(1, n) = 1$ ,  $R(2, n) = n$ ,  $R(m, n) = R(n, m)$ .

- а) Найдите  $R(3, 3)$ .  
б) Найдите  $R(3, 4)$ .
- Докажите, что для любых натуральных  $m, n \geq 3$  выполнено:  
а)  $R(m, n) \leq R(m, n-1) + R(m-1, n)$ .  
б)  $R(m, n) \leq C_{m+n-2}^{m-1}$ .  
в)  $R(m, n) \leq R(m, n-1) + R(m-1, n) - 1$ , если  $R(m, n-1)$  и  $R(m-1, n)$  – чётны.
- Для любого натурального  $n$  верно  $R(n, n) > (n-1)^2$ .
- Обозначим за  $g(x, n)$  долю графов, содержащих клику на  $n$  вершинах, среди всех графов на  $x$  вершинах. Докажите, что:  
а)  $g(x, n) \leq \frac{x^n}{n! \cdot 2^{C_n^2}}$ .  
б) Для любого натурального  $n \geq 2$  выполнено  $R(n, n) \geq 2^{\frac{n}{2}}$ .

### Раскраски в несколько цветов

**Определение.** Число Рамсея  $R(k; n_1, \dots, n_k)$  – наименьшее натуральное число  $x$  такое, что для любой раскраски полного графа на  $x$  вершинах в  $k$  цветов для некоторого  $i$  обязательно найдётся клика на  $n_i$  вершинах цвета  $i$ .

- Докажите аналогичные оценки сверху для обобщения:  
а)  $R(k; n_1, \dots, n_k) \leq R(k; n_1-1, n_2, \dots, n_k) + \dots + R(k; n_1, n_2, \dots, n_k-1) - k + 2$ .  
б)  $R(k; n_1, \dots, n_k) \leq \frac{(n_1+n_2+\dots+n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$ .
- Даны 6 произвольных иррациональных чисел. Докажите, что можно выбрать из них 3 числа  $x, y, z$  так, что числа  $x+y, y+z, z+x$  иррациональны.
- Теорема Шура.** Все натуральные числа покрашены в несколько цветов. Тогда можно выбрать три одноцветных числа  $x, y, z$ , для которых  $x+y=z$ .